Date

1997年 東大数学 文系第1問

対称式 基本対称式

$a^2+b^2=16$
$a^3+b^3=44$ $\longrightarrow$ $a+b$, ab を求める。

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=16$
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=44$

$a+b$ と ab の連立方程式

見やすくするための置換 $\underline{a+b=x \quad ab=y}$ とおくと。

◀ この時点で実数条件を調べてもよい。

$$\begin{cases} x^2-2y=16 \\ x^3-3xy=44 \end{cases}$$ という x と y の連立方程式

$x^2-2y=16 \iff y=\frac{1}{2}x^2-8$ を代入し、
$x^3-3x\left(\frac{1}{2}x^2-8\right)=44$
$\iff x^3-48x+88=0$
$\iff (x-2)(x^2+2x-44)=0$

91%. こたえ

怪しい → 調べる

$\therefore x=2,\ -1\pm3\sqrt{5}$ $y=\frac{1}{2}x^2-8$ に代入し、
$(x,y)=(2,-6)\ (-1+3\sqrt{5},\ 15-3\sqrt{5})\ (-1-3\sqrt{5},\ 15+3\sqrt{5})$
つまり
$(a+b,\ ab)=(2,-6)\ (-1+3\sqrt{5},\ 15-3\sqrt{5})\ (-1-3\sqrt{5},\ 15+3\sqrt{5})$

ここで、a と b は、ある t の2次方程式 $t^2-(a+b)t+ab=0$ の2解なので、実数条件から
$D=(a+b)^2-4ab\geqq0$ である。

実数条件

上の $(a+b,\ ab)$ の3組のうち、これを満たすのは
$(a+b,\ ab)=(2,-6)$ のみ。

よって $\underline{a+b=2}$ //

(2) ほとんど典型問題。帰納法で証明 → 漸化式がほしい。

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}+b^{n-1})-ab^{n-1}-ba^{n-1}$
$=(a+b)(a^{n-1}+b^{n-1})-ab(a^{n-2}+b^{n-2})$
$=2(a^{n-1}+b^{n-1})+6(a^{n-2}+b^{n-2})$

作った

$\therefore a^n+b^n=2(a^{n-1}+b^{n-1})+6(a^{n-2}+b^{n-2})$
n を $n+2$ に置き換え、
$a^{n+2}+b^{n+2}=2(a^{n+1}+b^{n+1})+6(a^n+b^n)$ ◀ 帰納法で使いやすいように変形

以下、数学的帰納法で証明する。

(i) $n=2$ のとき $a^2+b^2=16$
$n=3$ のとき $a^3+b^3=44$ なので、どちらも4の倍数。

(ii) $n=k$ のとき $a^k+b^k=4N$
$n=k+1$ のとき $a^{k+1}+b^{k+1}=4M$ と4の倍数であると仮定する。

(iii) $n=k+2$ のとき、

$a^{k+2}+b^{k+2}=2(a^{k+1}+b^{k+1})+6(a^k+b^k)$
$=2\times4N+6\times4M$
$=4(2N+6M)$ よって4の倍数。

以上より、2以上のすべての n で a^n+b^n は4の倍数。